

文章编号:1000-8055(2011)05-0984-07

抛物化 Navier-Stokes 方程在求解 高超声速流动稳定性分析 的基本流中的应用

刘建新, 禹 旻, 罗纪生

(天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300072)

摘 要: 通过在边界层内部使用边界层上缘的流向压力梯度代替该处的流向压力梯度, 对传统抛物化 Navier-Stokes(PNS)方程求解中的流向压力梯度的处理方法进行改进, 从而使它可以求解用于稳定性分析的高超声速流动的基本流, 并分别计算了平板、零攻角钝锥和小攻角钝锥三种典型算例. 对于流向没有分离, 且横向流动不强的流动, 使用 PNS 方程计算高超声速流动稳定性分析用的基本流是可靠的. 特别是改进后的方法求得的基本流的稳定性分析结果与直接求解 Navier-Stokes(N-S)方程的结果非常吻合, 但计算的时间消耗和空间占用都减少了一个数量级.

关 键 词: 抛物化 Navier-Stokes(PNS)方程; 稳定性; 高超声速; 基本流; 流向压力梯度

中图分类号: O354.4; O357.41

文献标志码: A

Application of parabolized Navier-Stokes equations into basic flows for stability analysis of hypersonic flows

LIU Jian-xin, YU Min, LUO Ji-sheng

(Department of Mechanics, School of Mechanical Engineering,
Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: By using streamwise pressure gradient on the edge of the boundary layer instead of that in the boundary layer, traditional solution for streamwise pressure gradient in parabolized Navier-Stokes (PNS) equations was improved and applied to PNS equations as basic flows for stability analysis of hypersonic flows. Three typical examples with flat, blunt cone at zero and small angle of attack, were calculated. For the blunt three-dimension flows or two-dimension flows, PNS equations are reliable to get the hypersonic basic flows for stability analysis, and the results of the stability analysis are in good agreement with those obtained by solving Navier-Stokes (N-S) equations directly, but expense of time and space is an order of magnitude lower than N-S equations.

Key words: parabolized Navier-Stokes (PNS) equations; stability; hypersonic;
basic flows; streamwise pressure gradient

收稿日期:2010-04-24; 修订日期:2010-07-10

基金项目:国家重点基础研究发展计划(2009CB724103); 国家自然科学基金重大项目(90716007);
国家自然科学基金重点项目(10632050)

作者简介:刘建新(1982-),男,天津人,博士,主要从事流动稳定性和转捩研究.

稳定性和转捩预测是高超声速飞行器设计中的技术难点之一. 准确地对高马赫数下的流场进行稳定性分析需要计算高精度的基本流. 目前较为常用的计算基本流的方法主要是直接求解 Navier-Stokes(N-S) 方程^[1-5] 或者边界层方程^[6]. 其中, 求解 N-S 方程虽然得到的结果最为精确可信, 但需要消耗大量的计算时间和存储空间, 计算成本太高; 并且在计算时, 如果给定的流场初值距离定常解的太远, 也会大大地增加计算的强度和难度. 边界层方程则通过忽略掉 N-S 方程中的流向和展向的二次导数项, 假设法向压力梯度为零, 将原方程抛物化进行求解, 这样可以大大减少计算所需的空间和时间, 但边界层方程只适用于边界层内的流动, 在使用前必须先求解欧拉方程, 得到无黏流场的解后再进行边界层流场的求解. 此外, 在边界层方程中, 忽略了展向的二阶导数项, 其实这一项是可以保留的. 这就意味着需要一种高效的, 并且高精度的方法来求解用于稳定性分析的基本流.

抛物化 N-S(parabolized Navier-Stokes, 简称 PNS) 方程即是这样的一种方法. 它介于 N-S 方程和边界层方程之间, 通过忽略掉控制方程黏性项中的流向偏导数^[7], 将原方程抛物化进行求解. 这样简化, 一方面, 由于方程在流向呈抛物化, 因此可以沿空间推进求解, 方程降低了一个维度, 从而大大节省了计算的时间消耗和空间占用; 另一方面, 在无黏区域, PNS 方程退化为通量形式表达的欧拉方程, 这样就不用像边界层方程一样先求解无黏问题; 此外, PNS 方程可以方便地使用高精度格式进行计算.

以往 PNS 方程较为常见地应用在求解压力上^[8], 而对黏性区速度剖面的精度并不十分清楚. 但在流动稳定性分析时对速度剖面有一定精度的要求, 这就意味着, 如果要用 PNS 方程代替直接求解 N-S 方程得到用于稳定性分析的基本流, 就需要对该方法在速度方面的精度进行验证. 针对高超声速流动中的一些典型问题, 在进行了一定的计算比较后, 本文对 PNS 方程中流向压力项的处理方式进行了改进, 然后用 PNS 方程求解基本流, 进行了稳定性分析, 将结果与 N-S 方程的结果进行了比较, 探讨了本文发展的应用于 PNS 方程的流向压力梯度计算方法在求解稳定性问题基本流中的可用性.

1 控制方程与数值方法

1.1 控制方程

Lubard 和 Helliwell^[9] 通过分析, 发现在流动控制方程黏性项所包含的偏导数中, 流向偏导数具有 $O(1)$ 的量级, 而横向偏导数具有 $O(Re^{1/2})$ 的量级, 因此, 可以将控制方程黏性项中流向的偏导数忽略, 这就是当前最为广泛应用的守恒型 PNS 方程^[7].

在一般的正交坐标系中, 假定 ξ 向为近似主流方向, 略去黏性项中所有的 ξ 方向的导数项, 可以得到三维的 PNS 方程, 具体形式如下:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v^*)}{\partial \zeta} = 0 \quad (1)$$

其中对流项的表达形式与一般正交坐标系中的形式一样, 黏性项中, 忽略掉了 ξ 方向上的黏性项, 以及 η 和 ζ 方向上黏性项中对 ξ 方向的偏导数, 忽略后的黏性通量分别用 $\mathbf{F}_v^*$ 和 $\mathbf{G}_v^*$ 表示. 通过以上处理即得到了一种目前常用的 PNS 方程形式.

1.2 流向压力梯度的处理

在 PNS 方程中, 虽然省略了黏性项中沿主流方向速度和温度的导数, 但是保留了流向压力沿流向的导数. 这就意味着, 在边界层内的亚声速区域存在着向上游传播的信息, 压力项具有局部的椭圆性的特征, 这种残余椭圆性会导致计算出现数值不稳定. 为了消除数值不稳定, 人们提出了多种方法, 其中应用比较广泛的是压力分裂法. 其基本思想是: 将动量方程中流向压力导数分裂成 $\omega_{\text{split}} \frac{\partial p}{\partial \xi}$ 和 $(1 - \omega_{\text{split}}) \frac{\partial p}{\partial \xi}$, 然后分别处理. 一般情况求解问题时, 常常将后一项完全忽略. 其中, ω_{split} 为分裂因子, 可以通过 Vigneron 法^[10] 或者 Thivet 法^[11] 求得.

对于一般的气动问题, 以上两种传统的压力分裂法可以满足计算精度和方程适定性的要求, 然而在进行稳定性分析时, 不管使用 Vigneron 法还是 Thivet 法, 得到的剖面的稳定性分析结果与直接求解 N-S 方程得到的剖面的稳定性分析结果均存在一些差距, 表现为不稳定波的频率偏高^[12], 因而有必要提出一种方法把基本流计算得更准确.

根据流动稳定性分析的需要,一般总是先用低精度格式粗网格求解整体流场,然后用加密网格及高精度格式求边界层附近的流场.仿照这样的方法,应用 PNS 方程计算流场,在求解整体流场时,先使用 Vigneron 法或者 Thivet 法对压力梯度进行修正;在计算边界层附近的流场时,应用边界层方程中类似的概念,将动量方程中流向压力导数全部保留,写成如下形式:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_{y=\sigma\delta} \quad (2)$$

其中 δ 为流动的边界层名义厚度, σ 为一个大于 1 的安全系数,可以取 $[1, 1.5]$,即在边界层内部,使用边界层上缘的流向压力梯度代替该处的流向压力梯度.

进行这样处理的依据是:在边界层内部,利用边界层的概念假设处理法向的动量方程.这样,在边界层内,流场的法向压力梯度就近似等于零,而流向的动量方程中的压力梯度项即可以简化为边界层上缘处的流向压力梯度.

1.3 数值方法

为了求解 PNS 方程并且应用高精度的差分格式,本文尝试使用有限差分法求解方程.在方程中引入伪时间项 $\partial \mathbf{U} / \partial \tau$,其中 $\mathbf{U}$ 为流动通量,则方程变为如下形式:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial (\mathbf{F} - \mathbf{F}^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (\mathbf{G} - \mathbf{G}^*)}{\partial \zeta} = 0 \quad (3)$$

经过这样的变化,对于某一特定流向位置,方程即变为在该流向位置上的二维定常流动问题,即可以按照一般求解 N-S 方程的方法求解.由于稳定性分析时需要比较高的精度的基本流场,因而需要使用高精度的差分格式求解方程.为此在 η 和 ζ 方向上,对流项通量分裂后使用五阶迎风差分格式,当流场中有激波存在时,则可以采用 NND(non-oscillatory containing no free parameters and dissipative)格式或者 WENO(weighted essentially non-oscillatory)格式等能够有效捕捉激波的差分格式,黏性项采用六阶中心差分格式.在 ξ 方向上,对流项采用单边偏心差分格式.在本文中,伪时间项采用四阶 Runge-Kutta(R-K)方法求解.当某一流向位置计算定常后,沿流向向下游推进求解.通过这样的简化,方程求解即从一个三维定常问题简化为一个二维定常问题,在存储空间以及计算时间效率上都得到了巨大的提高.

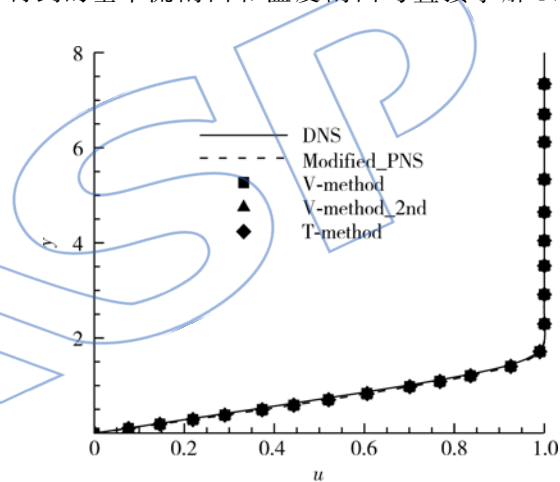
2 算例计算

为了验证 PNS 方程中流向压力梯度的处理方法,分别对平板、零攻角钝锥、小攻角钝锥等三种流动进行了计算.

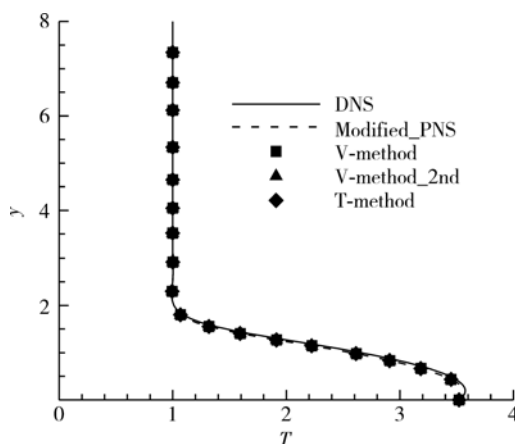
2.1 高超声速平板边界层

先考虑高超声速平板边界层问题.设定来流马赫数 $Ma = 4.5$, $Re_{\delta_0^*} = 100\,000$ (以边界层排移厚度 δ_0^* 定义),来流温度 $T_\infty = 255.7\text{ K}$,壁面取等温情况,其中壁面温度 $T_w = 900.5\text{ K}$.

图 1 给出了使用直接求解 N-S(DNS)方程,改进方法求解 PNS(modified_PNS)方程, Vigneron 法(V-method 和 V-method_2nd)以及 Thivet 法(T-method)计算得到的结果.不同方法得到的基本流剖面与温度剖面与直接求解 N-S



(a) 速度剖面比较



(b) 温度剖面比较

图 1 几种方法得到的平板的速度和温度剖面的比较($x=1200$)

Fig. 1 Profile of velocity and temperature for flat with different methods ($x=1200$)

方程得到的结果是吻合的,并且对流向差分格式的选取并不敏感。

图2给出了 $x=1200$ 流向位置处使用不同方法得到的不稳定波的频率(ω)和增长率($-\alpha_i$)之间的关系.从图中可以明显看出,求解 PNS 方程时,不管使用 Vigneron 法还是 Thivet 法处理流向压力梯度,得到的剖面稳定性分析结果与直接求解 N-S 方程得到的剖面稳定性结果都有一些差距,表现为不稳定波的频率偏高,而使用本文中提出的流向压力梯度处理方法,得到的稳定性结果与 N-S 方程得到的结果基本相同.这表明,对于平板边界层问题,改进了流向压力梯度项的处理方式之后,PNS 方程可以得到令人满意的平均流剖面稳定性分析结果。

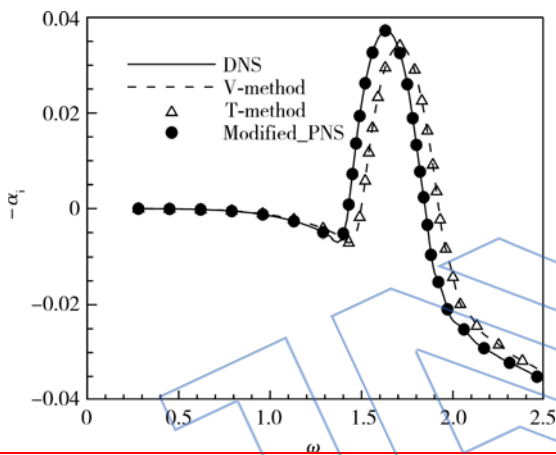


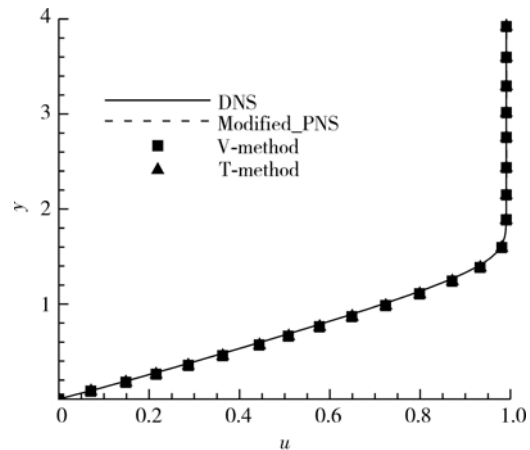
图2 几种方法得到的平板下游处频率和增长率的关系对比($x=1200$)

Fig. 2 Variation of growth rate with different frequencies for flat with different methods ($x=1200$)

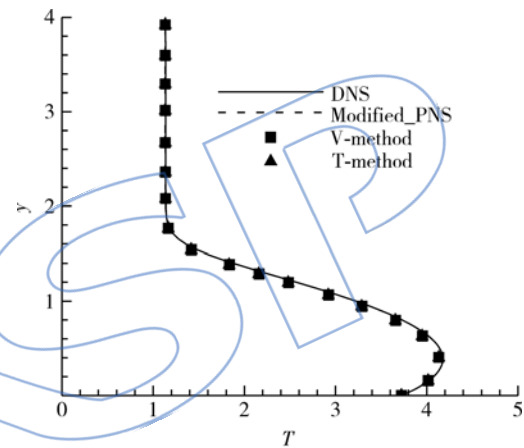
2.2 零攻角钝锥边界层

零攻角钝锥边界层算例的工况为:来流马赫数 Ma 为 6,温度 T_∞ 为 79 K,单位雷诺数 Re/L 为 10^7 m^{-1} .钝锥的半锥角 θ 为 5° ,头半径 R 为 1.0 mm,攻角 α 为 0° .壁面采用等温壁,壁面温度 T_w 为 294 K.以头半径 R 为长度的无量纲长度单位,来流速度 U_∞ 和来流温度 T_∞ 为速度和温度的无量纲单位对方程进行无量纲化.此时,雷诺数 Re_R 为 10 000.

图3给出了不同方法计算得到的基本流剖面之间的对比.从图中可以看出,使用不同方法得到的基本流剖面与温度剖面与直接求解 N-S 方程得到的结果是吻合的。



(a) 速度剖面比较



(b) 温度剖面比较

图3 几种方法得到的零攻角钝锥的速度和温度剖面的比较(600 倍头半径处)

Fig. 3 Profile of velocity and temperature for blunt cone at zero angle of attack with different methods (600 head radius)

图4给出了下游 600 倍头半径处第二模态不稳定波频率与增长率的曲线的对比.从图中可以看到,传统的压力梯度修正方法比 N-S 方程的结果的不稳定波的频率范围略大,而使用改进的压力梯度修正方法计算流场的稳定性结果与 N-S 方程的结果十分接近.图5给出了流场的 e^N 曲线.可以看到,几种不同的方法得到的 e^N 曲线判断的转捩位置基本一致.其中使用本文的压力梯度处理方法得到的结果与 N-S 方程的结果最为接近.这表明,对于有曲率存在以及轴对称问题,改进的方法求解 PNS 方程也可以很好地替代 N-S 方程求解用于稳定性和转捩预测问题中的基本流流场。

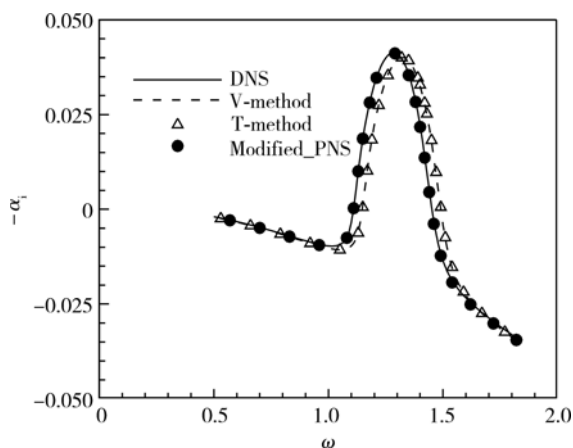


图 4 几种方法得到的零攻角钝锥下游处频率和增长率的关系对比(600 倍头半径处)

Fig. 4 Variation of growth rate with different frequencies for blunt cone at zero angle of attack with different methods (600 head radius)

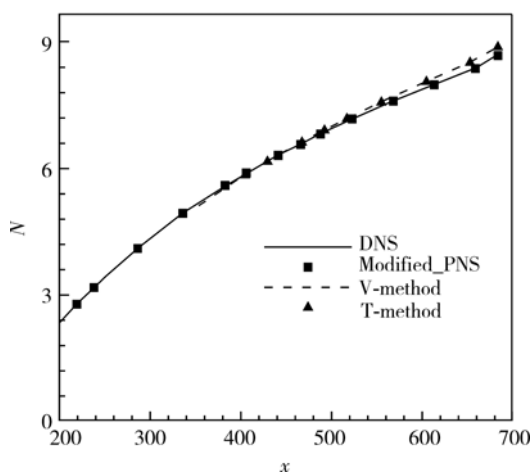


图 5 几种方法得到的零攻角钝锥的 e^N 曲线的比较

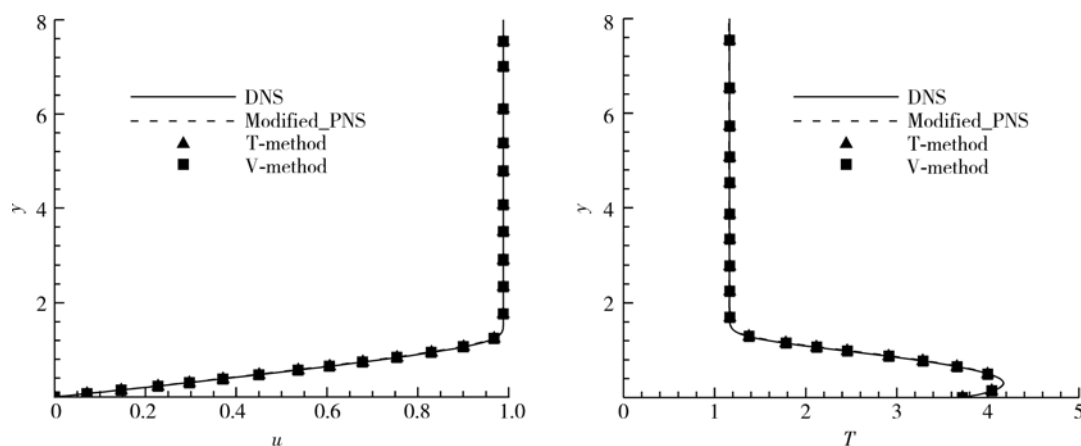
Fig. 5 e^N curve for blunt cone at zero angle of attack with different methods

2.3 小攻角钝锥边界层

以上平板、零攻角钝锥两种工况都是针对二维问题或者轴对称问题进行的. 对于三维边界层, 也需要验证 PNS 方程的适用性. 为此, 本文计算了小攻角钝锥的流场. 计算的来流工况以及边界条件的选取与前面零攻角钝锥情况时一样. 攻角 α 为 1° . 计算域流向选取从 500 倍头半径开始到 640 倍头半径的区域.

图 6 分别给出了下游 600 倍头半径流向位置处不同子午面处基本流剖面的对比(φ 是周向角度). 从图中可以看到, 在迎风面处($\varphi=0^\circ$)和侧面处($\varphi=140^\circ$), 速度和温度剖面吻合得很好; 但在

背风面处($\varphi=180^\circ$), PNS 方程的结果与 N-S 方程计算的结果产生了比较大的偏差. 这种偏差是由于背风面的流场具有极强的三维性, 流线在这部分区域会迅速偏向背风面的位置, 从而使得以网格定义的流向方向与真实的流动方向存在比较大的差距. 因而, 在横流较弱的区域, PNS 方程依然可以给出很好的基本流, 但在横向流动很强的区域, 选择 PNS 方程计算稳定性分析用的基本流时需要慎重. 但是, 这并不意味着 PNS 方程对于三维问题是没有任何意义的. 事实上, 可以通过 PNS 方程给定 N-S 方程求解时的初始流场, 从而使得 N-S 方程求解时可以更快地得到定常解.



(a) $\varphi=0^\circ$ (迎风面处)

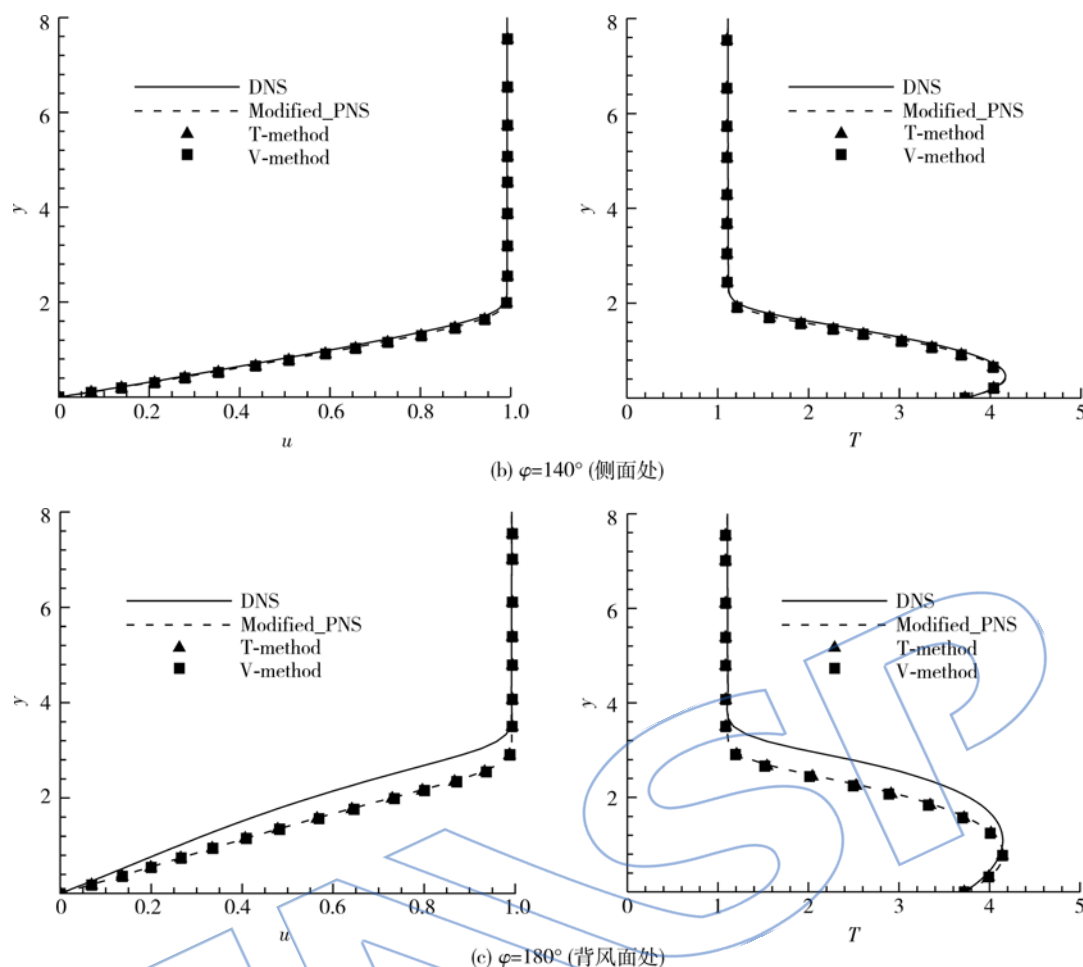


图6 几种方法得到的 1° 攻角钝锥的速度和温度剖面的比较(600 倍头半径处)

Fig. 6 Profile of velocity and temperature for blunt cone at 1° angle of attack with different methods (600 head radius)

3 结 论

本文对传统 PNS 方程求解中的流向压力梯度的处理方法进行改进,即在边界层内部,使用边界层上缘的流向压力梯度代替该处的流向压力梯度,并计算了三种典型算例.结果表明:对于流向没有分离,横向流动不强的流动,使用 PNS 方程计算高超声速流动稳定性问题中的基本流是可靠的.特别是本文发展的改进后的流向压力梯度处理方法求得的基本流的稳定性分析结果与直接求解 N-S 方程的结果非常吻合,但计算的时间消耗和空间占用都减少了一个数量级.对于横向流动很强的流动,虽然 PNS 方程得到的基本流与直接求解 N-S 方程差距很大,但可以通过 PNS 方程给定流场的初值,从而可以更快地得到基本流的定常解.

参考文献:

- [1] Malik M R, Spall R E, Chang C L. Effect of nose bluntness on boundary layer stability and transition[R]. AIAA Paper 1990-0112, 1990.
- [2] Herbert T, Esfahanian V. Stability of hypersonic flow over a blunt body[R]. AGARD, Theoretical and Experimental Methods in Hypersonic Flows 12p (SEE N94-10421 01-02), AGARD-CP-514, 1993.
- [3] Kufner E, Dallmann U, Stilla J. Instability of hypersonic flow past blunt cones-effects of mean flow variations[R]. AIAA Paper 1993-2983, 1993.
- [4] 闫淇, 罗纪生. 超声速流中圆锥头部钝度对边界层稳定性的影响[J]. 空气动力学学报, 2008, 26(4): 430-434.
YAN Ming, LUO Jisheng. The bluntness effect on stability of boundary layer over blunt cone in supersonic flow[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2008, 26(4): 430-434. (in Chinese)

- [5] 苏彩虹,周恒. 零攻角小钝头钝锥高超音速绕流边界层的稳定性分析和转捩预报[J]. 应用数学和力学, 2007, 28(5): 505-513.
SU Caihong, ZHOU Heng. Stability analysis and transition prediction of hypersonic boundary layer over a blunt cone with small nose bluntness at zero angle of attack[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(5): 505-513. (in Chinese)
- [6] 苏彩虹,周恒. 小攻角高超音速尖锥边界层的转捩预测及 e^N 法的改进[J]. 中国科学(G辑:物理学力学天文学), 2009, 39(1): 123-130.
SU Caihong, ZHOU Heng. Transition prediction for supersonic and hypersonic boundary layers on a cone with angle of attack[J]. Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica, 2009, 39(1): 123-130. (in Chinese)
- [7] Anderson D A, Tannehill J C, Pletcher R H. Computational fluid mechanics and heat transfer[M]. New York: Hemisphere Publishing, 1984.
- [8] 陈兵,徐旭,蔡国彪. 一种求解抛物化 Navier-Stokes 方程的空间推进算法[J]. 力学学报, 2008, 40(2): 162-170.
CHEN Bing, XU Xu, CAI Guobiao. A space-marching algorithm for solving the parabolized Navier-Stokes equations[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2008, 40(2): 162-170. (in Chinese)
- [9] Lubard S C, Helliwell W S. Calculation of the flow on a cone at high angle of attack[J]. AIAA Journal, 1974, 12(7): 965-974.
- [10] Vigneron Y C, Rahich J V, Tannehill J C. Calculation of supersonic viscous flow over delta wings with sharp subsonic leading edges[R]. AIAA Paper 1978-1137, 1978.
- [11] Thivet F. The exact jacobian associated with steady PNS equations and its use to define new numerical schemes [C]// Proceedings of the Sixteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. France: Springer-Verlag, 1998: 320-325.
- [12] Hejranfar K, Esfahanian V, Darian H M. On the use of high-order accurate solutions of PNS schemes as basic flows for stability analysis of hypersonic axisymmetric flows[J]. Journal of Fluids Engineering, 2007, 129(10): 1328-1338.